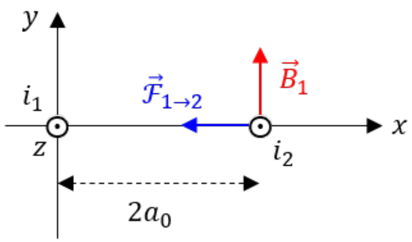
Exercice n°1 • Forces de Laplace entre deux fils parallèles *cours*

1) Cf. cours. Le champ tourbillonne autour du fil dans le sens de la main droite.

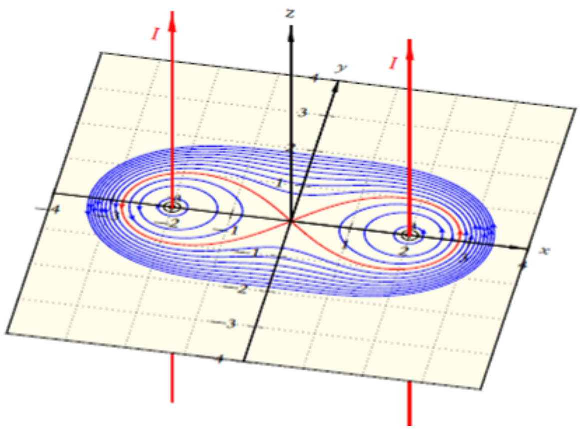
2) On place un fil au centre d'un repère avec un courant orienté selon l'axe (Oz). Orientons le courant de l'autre fil dans le même sens et déterminons le sens de la force.



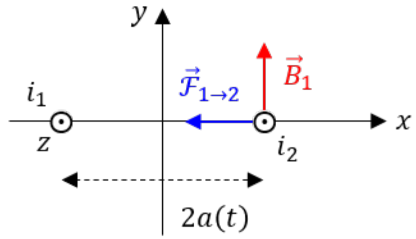
La force linéique de Laplace vaut :

$$\vec{\mathcal{F}}_{1\to 2} = i_2\,\vec{u}_2 \wedge \vec{B}_1 = -i_2 B_1\,\vec{u}_{1\to 2}$$

La force est attractive.



3) On place un repère centré par rapport aux deux fils. La référentiel associé à ce repère est galiléen puisque le centre de masse des deux fils est immobile. On repère par $x(t) = a(t)$ la position du fil de droite.



On applique le PFD (version linéique) sur le fil de droite qui ne subit que la force de Laplace du fil de gauche.

$$\boxed{\lambda\,\ddot{a} = -\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}}$$

4) On a :

$$\ddot{a} = -\frac{K}{a} \quad \text{avec :} \quad K = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi\lambda}$$

On multiplie par $\dot{a}$ et on intègre pour obtenir l'intégrale première du mouvement.

$$\begin{aligned}
\dot{a}\ddot{a} + K\frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}^2}{2} + K\ \ln(a)\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \dot{a}^2 + 2K\ \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \\
&\Rightarrow \quad \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 2K\ \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)
\end{aligned}$$

Puisque la force est attractive, a est une fonction décroissante et donc $\dot{a} < 0$. On en déduit :

$$\frac{da}{dt} = -\sqrt{2K\ \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{-\sqrt{2K\ \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)}} = dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant final. On introduit également la variable $x = a/a_0$.

$$T = \int_0^T dt = \int_{a_0}^{a} \frac{da}{-\sqrt{2K\ \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)}} = \frac{a_0}{\sqrt{2K}} \int_1^0 \frac{dx}{-\sqrt{\ln(1/x)}}$$

Finalement :

$$\boxed{T = \frac{a_0}{i}\sqrt{\frac{2\pi\lambda}{\mu_0}}\ \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}}}_{\simeq 1{,}772}}$$

Exercice n°2 • Équilibre d'un aimant ★☆☆

Pour ne pas tomber, la somme des moments selon l'axe (Oz) doit être nulle (TMC).

Moment du poids :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{P}\right) = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = mgd$$

Moment de la réaction normale du support :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{R}\right) = \left(\overrightarrow{OO} \wedge \overrightarrow{R}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = 0$$

Moment des actions de Laplace :

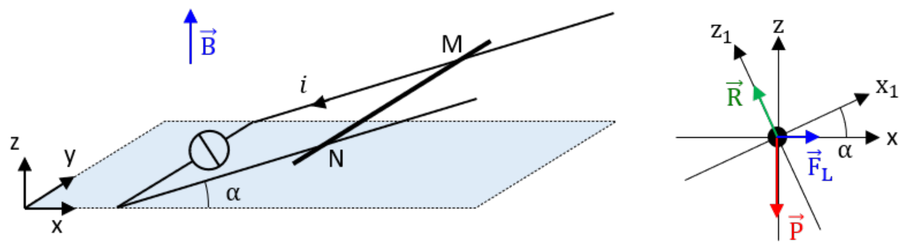
$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_L}\right) = \left(\overrightarrow{\mu} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = -\mu B$$

On applique le TMC à l'équilibre :

$$0 = mgd - \mu B \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{\mu B}{mg}}$$

Exercice n°3 • Rails de Laplace en pente ★☆☆

1) Schéma, vue en 3D et de profil :



2) Bilan des forces dans la base (x_1, z_1) : poids, réaction normale du support et force de Laplace.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P} &= mg\left(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{e_{z_1}} - \sin(\alpha)\,\overrightarrow{e_{x_1}}\right) \\
\overrightarrow{R} &= R\,\overrightarrow{e_{z_1}} \\
\overrightarrow{F_L} &= i\,\overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{B} = iaB\,\overrightarrow{e_x} = iaB\left(\cos(\alpha)\,\overrightarrow{e_{x_1}} - \sin(\alpha)\,\overrightarrow{e_{z_1}}\right)
\end{aligned}$$

On applique le PFD à l'équilibre (on ne s'intéresse qu'à la projection selon $\overrightarrow{e_{x_1}}$) :

$$0 = -mg\sin(\alpha) + iaB\cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{mg}{aB}\tan(\alpha) = 6{,}0\ \text{A}}$$

Exercice n°4 • Fil de torsion ★★☆

1) Les actions sont : le poids (moment nul), couple de torsion, couple de Laplace (nul à la question 1, présent à la question 2) et la liaison pivot (parfaite, donc moment nul). Le TMC à l'équilibre donne :

$$0 = -C\alpha$$

L'équilibre se fait en $\alpha = 0$.

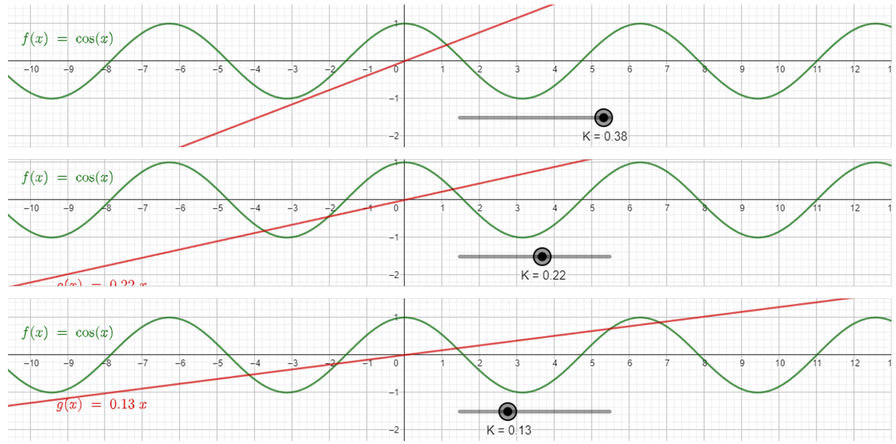
2) Moment du couple de Laplace :

$$\mathcal{M}_z\left(\overrightarrow{F_L}\right) = \left(Ni\,\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = Nia^2B\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Nia^2B\cos(\alpha)$$

Le TMC à l'équilibre donne :

$$0 = -C\alpha_{eq} + Nia^2B\cos(\alpha_{eq}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos(\alpha_{eq} = K \cdot \alpha_{eq})}$$

3)



Dans cet exercice : $K = 1{,}67$. Il existe donc une seule solution.

Exercice n°5 • Oscillation d'une tige ★★★

1) Les actions sont : le poids, les actions de Laplace et la liaison pivot (parfaite).

2) Moment du poids :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{P}\right) = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{P}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\frac{\ell}{2}\,\overrightarrow{u_r} \wedge m\overrightarrow{g}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \boxed{-\frac{mg\ell}{2}\sin(\theta)}$$

Moment de la force de Laplace :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\overrightarrow{F_L}\right) = \left(\overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F_L}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \left(\frac{\ell}{2}\,\overrightarrow{u_r} \wedge \left(I\,\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{B}\right)\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = \boxed{\frac{I\ell^2 B}{2}}$$

Le moment de la liaison pivot est nulle. 3) On applique le TMC (projeté sur Δ et à l'équilibre) à la barre dans le référentielle terrestre supposé galiléen :

$$0 = -\frac{mg\ell}{2}\,\sin(\theta_{eq}) + \frac{I\ell^2 B}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta_{eq}) = \frac{I\ell B}{mg} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{eq} = 0,58\,^\circ}$$

4) On applique le TMC :

$$J_\Delta\,\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{2}\,\sin(\theta) + \frac{I\ell^2 B}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_\Delta}\,\sin(\theta) = \frac{I\ell^2 B}{2J_\Delta}}$$

5) Dans l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = \frac{I\ell^2 B}{2J_\Delta} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J_\Delta}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2J_\Delta}{mg\ell}}}$$

6) On multiplie par $\dot{\theta}$ puis on intègre entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\begin{aligned} & J_\Delta\,\ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{2}\,\sin(\theta) + \frac{I\ell^2 B}{2} \\ \Rightarrow \quad & J_\Delta\,\dot{\theta}\ddot{\theta} - \frac{I\ell^2 B}{2}\,\dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2}\dot{\theta}\,\sin(\theta) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - \frac{I\ell^2 B}{2}\,\theta - \frac{mg\ell}{2}\,\cos(\theta)\right] = 0 \end{aligned}$$

On en déduit bien :

$$\boxed{\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - \frac{I\ell^2 B}{2}\,\theta - \frac{mg\ell}{2}\,\cos(\theta) = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_0^2 - \frac{I\ell^2 B}{2}\,\theta_0 - \frac{mg\ell}{2}\,\cos(\theta_0)}$$

7) On reconnaît plus haut la conservation de l'énergie mécanique

$$\underbrace{\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2}_{=\mathcal{E}_c}\ \underbrace{-\frac{I\ell^2 B}{2}\,\theta - \frac{mg\ell}{2}\,\cos(\theta)}_{=\mathcal{E}_p} = cte$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{I\ell^2 B}{2}\,\theta - \frac{mg\ell}{2}\,\cos(\theta)}$$

8) Sur le graphique, on repère un minimum (équilibre stable) et un maximum (équilibre instable).