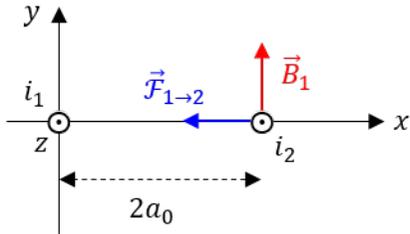


Induction | Chapitre 2 | Correction TD (I2)

Exercice n°1 • Forces de Laplace entre deux fils parallèles

cours

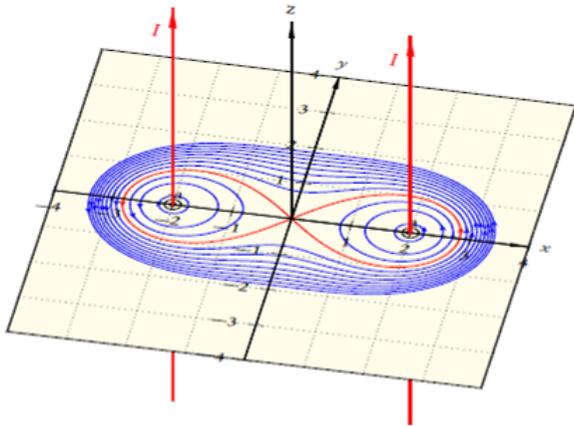
- 1) Cf. cours. Le champ tourbillonne autour du fil dans le sens de la main droite.
- 2) On place un fil au centre d'un repère avec un courant orienté selon l'axe (Oz) . Orientons le courant de l'autre fil dans le même sens et déterminons le sens de la force.



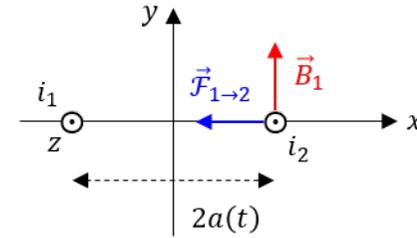
La force linéique de Laplace vaut :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = i_2 \vec{u}_2 \wedge \vec{B}_1 = -i_2 B_1 \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

La force est attractive.



- 3) On place un repère centré par rapport aux deux fils. La référentiel associé à ce repère est galiléen puisque le centre de masse des deux fils est immobile. On repère par $x(t) = a(t)$ la position du fil de droite.



On applique le PFD (version linéique) sur le fil de droite qui ne subit que la force de Laplace du fil de gauche.

$$\lambda \ddot{a} = -\frac{\mu_0 i^2}{4\pi a}$$

4) On a :

$$\ddot{a} = -\frac{K}{a} \quad \text{avec : } K = \frac{\mu_0 i^2}{4\pi \lambda}$$

On multiplie par \dot{a} et on intègre pour obtenir l'intégrale première du mouvement.

$$\begin{aligned} \dot{a}\ddot{a} + K\frac{\dot{a}}{a} &= 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{a}^2}{2} + K \ln(a) \right) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{a}^2 + 2K \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \\ &\Rightarrow \left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 2K \ln\left(\frac{a_0}{a}\right) \end{aligned}$$

Puisque la force est attractive, a est une fonction décroissante et donc $\dot{a} < 0$. On en déduit :

$$\frac{da}{dt} = -\sqrt{2K \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)} \Rightarrow \frac{da}{-\sqrt{2K \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)}} = dt$$

On intègre entre l'instant initial et l'instant final. On introduit également la variable $x = a/a_0$.

$$T = \int_0^T dt = \int_{a_0}^a \frac{da}{-\sqrt{2K \ln\left(\frac{a_0}{a}\right)}} = \frac{a_0}{\sqrt{2K}} \int_1^0 \frac{dx}{-\sqrt{\ln(1/x)}}$$

Finalement :

$$T = \frac{a_0}{i} \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{\mu_0}} \underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln(1/x)}}}_{\simeq 1,772}$$

Exercice n°2 • Équilibre d'un aimant



Pour ne pas tomber, la somme des moments selon l'axe (Oz) doit être nulle (TMC).

Moment du poids :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = mgd$$

Moment de la réaction normale du support :

$$\mathcal{M}_z(\vec{R}) = (\vec{OD} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{u}_z = 0$$

Moment des actions de Laplace :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_L) = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = -\mu B$$

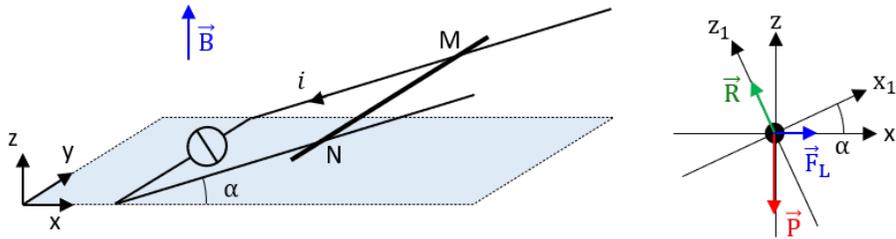
On applique le TMC à l'équilibre :

$$0 = mgd - \mu B \Rightarrow \boxed{d = \frac{\mu B}{mg}}$$

Exercice n°3 • Rails de Laplace en pente



1) Schéma, vue en 3D et de profil :



2) Bilan des forces dans la base (x_1, z_1) : poids, réaction normale du support et force de Laplace.

$$\vec{P} = mg(-\cos(\alpha) \vec{e}_{z_1} - \sin(\alpha) \vec{e}_{x_1})$$

$$\vec{R} = R \vec{e}_{z_1}$$

$$\vec{F}_L = i \vec{NM} \wedge \vec{B} = iaB \vec{e}_x = iaB (\cos(\alpha) \vec{e}_{x_1} - \sin(\alpha) \vec{e}_{z_1})$$

On applique le PFD à l'équilibre (on ne s'intéresse qu'à la projection selon \vec{e}_{x_1}) :

$$0 = -mg \sin(\alpha) + iaB \cos(\alpha) \Rightarrow \boxed{i = \frac{mg}{aB} \tan(\alpha) = 6,0 \text{ A}}$$

Exercice n°4 • Fil de torsion



1) Les actions sont : le poids (moment nul), couple de torsion, couple de Laplace (nul à la question 1, présent à la question 2) et la liaison pivot (parfaite, donc moment nul). Le TMC à l'équilibre donne :

$$0 = -C\alpha$$

L'équilibre se fait en $\alpha = 0$.

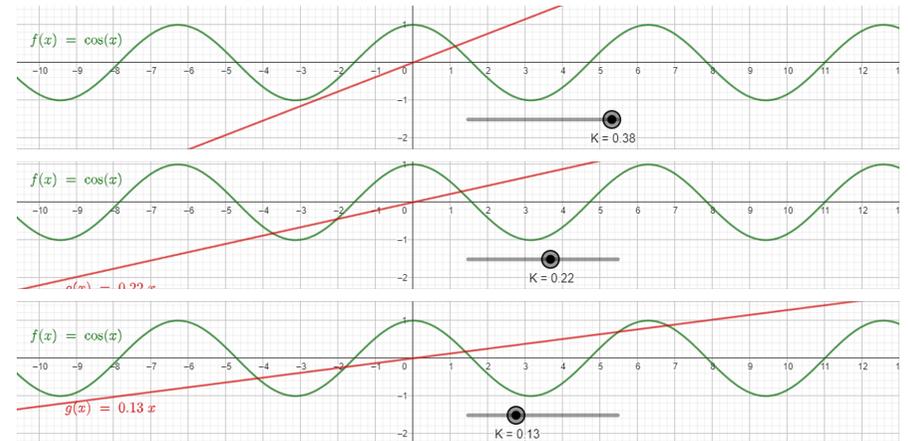
2) Moment du couple de Laplace :

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_L) = (Ni \vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = Nia^2 B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = Nia^2 B \cos(\alpha)$$

Le TMC à l'équilibre donne :

$$0 = -C\alpha_{eq} + Nia^2 B \cos(\alpha_{eq}) \Rightarrow \boxed{\cos(\alpha_{eq} = K \cdot \alpha_{eq})}$$

3)



Dans cet exercice : $K = 1,67$. Il existe donc une seule solution.

Exercice n°5 • Oscillation d'une tige



1) Les actions sont : le poids, les actions de Laplace et la liaison pivot (parfaite).

2) Moment du poids :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge m \vec{g}\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \boxed{-\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta)}$$

Moment de la force de Laplace :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_L) = (\vec{OG} \wedge \vec{F}_L) \cdot \vec{u}_{\Delta} = \left(\frac{\ell}{2} \vec{u}_r \wedge (I \vec{OA} \wedge \vec{B}) \right) \cdot \vec{u}_{\Delta} = \boxed{\frac{I\ell^2 B}{2}}$$

Le moment de la liaison pivot est nulle. 3) On applique le TMC (projeté sur Δ et à l'équilibre) à la barre dans le référentielle terrestre supposé galiléen :

$$0 = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta_{eq}) + \frac{I\ell^2 B}{2} \Rightarrow \sin(\theta_{eq}) = \frac{I\ell B}{mg} \Rightarrow \boxed{\theta_{eq} = 0,58^\circ}$$

4) On applique le TMC :

$$J_{\Delta} \ddot{\theta} = -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta) + \frac{I\ell^2 B}{2} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_{\Delta}} \sin(\theta) = \frac{I\ell^2 B}{2J_{\Delta}}}$$

5) Dans l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{I\ell^2 B}{2J_{\Delta}} \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{mg\ell}{2J_{\Delta}}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{2J_{\Delta}}{mg\ell}}}$$

6) On multiplie par $\dot{\theta}$ puis on intègre entre l'instant initial et un instant quelconque.

$$\begin{aligned} J_{\Delta} \ddot{\theta} &= -\frac{mg\ell}{2} \sin(\theta) + \frac{I\ell^2 B}{2} \\ \Rightarrow J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} - \frac{I\ell^2 B}{2} \dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2} \dot{\theta} \sin(\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - \frac{I\ell^2 B}{2} \theta - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta) \right] &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit bien :

$$\boxed{\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 - \frac{I\ell^2 B}{2} \theta - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta) = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_0^2 - \frac{I\ell^2 B}{2} \theta_0 - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta_0)}$$

7) On reconnaît plus haut la conservation de l'énergie mécanique

$$\underbrace{\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2}_{= \mathcal{E}_c} - \underbrace{\frac{I\ell^2 B}{2} \theta - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta)}_{= \mathcal{E}_p} = cte$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\frac{I\ell^2 B}{2} \theta - \frac{mg\ell}{2} \cos(\theta)}$$

8) Sur le graphique, on repère un minimum (équilibre stable) et un maximum (équilibre instable).